tentamen Algebra 12–3–2002, 9.00–12.00

1 Zij $a \in \mathbb{Z}$ oneven en niet door 3 deelbaar.
Laat zien dat $a^2 \equiv 1 \bmod 24$. (10 punten)

2 Geef alle normaaldelers van $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Hoeveel zijn dit er? (15 punten)

3 Zij G de factorgroep $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}$.

- **(a)** Bewijs dat elk element van G eindige orde heeft. (10 punten)
- **(b)** Is G eindig voortgebracht? Beredeneer je antwoord. (10 punten)
- **(c)** Toon aan dat $G[m] := \{x \in G : mx = 0\}$ isomorf is met $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
  Concludeer dat G precies $\phi(m)$ elementen van orde m heeft. (10 punten)

4 Hoe zijn de groepen A_n en D_n gedefinieerd?
Toon aan dat A_n een normaaldeler van S_n is en dat D_n een normaaldeler van index 2 heeft. (20 punten)

5 Geef alle $n \in \mathbb{N}$ waarvoor A_n een element van orde 60 heeft. (15 punten)

6 Cadeau! (10 punten)